На правах рукописи

Какушкин Сергей Николаевич

РАЗВИТИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НАХОЖДЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВОЗМУЩЕННЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Челябинск – 2013

Работа выполнена на кафедре прикладной математики и вычислительной техники ФГБОУ ВПО „Магнитогорский государственный университет“.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Кадченко Сергей Иванович.

Официальные оппоненты: доктор физико–математических наук, профессор,
ФГБОУ ВПО „Южно-Уральский государственный университет“ (НИУ), зав. каф.
экономико-математических методов и статистики
Панюков Анатолий Васильевич;
доктор физико–математических наук, профессор,
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
зав. каф. математического моделирования
Мустафина Светлана Анатольевна.

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО „Воронежский государственный университет“.

Защита состоится 8 ноября 2013 года в 15.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.298.14 при ФГБОУ ВПО „Южно-Уральский государственный университет“ (НИУ), по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. Ленина,76, ауд. 1001.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского государственного университета.

Автореферат разослан «__» октября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, доцент А. В. Келлер

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Математическое моделирование задач нахождения значений собственных функций дискретных операторов приобретает большой интерес в связи с широкой областью использования краевых, начально-краевых и спектральных задач в науке и технике, например, задачи гидродинамической теории устойчивости, электрических колебаний в протяженной линии, сейсморазведки, идентификации композитных материалов, проблем неразрушающего контроля, нелинейных эволюционных уравнений, редукции измерений за характеристику направленности антенны, обработка изображений (иконика), определение функций распределения истинных конфигураций тройных звезд и др.

Современные методы математического моделирования задач вычисления значений собственных функций возмущенных дискретных операторов основываются на составлении матрицы линейного оператора и нахождении собственных векторов этой матрицы. Суть метода А. М. Данилевского нахождения собственных векторов матрицы заключается в приведении векового определителя к нормальному виду Фробениуса. Согласно этому методу, переход от исходной матрицы A размера $n \times n$ к подобной ей матрице Фробениуса B[1] осуществляется с помощью $n-1$ преобразований подобий, последовательно преобразующих строки матрицы A, начиная с последней, в соответствующие строки матрицы B. В методе Крылова А. Н., для определения собственных векторов матриц необходимо решить систему линейных уравнений относительно коэффициентов характеристического полинома[2]. Однако, система уравнений может не иметь единственного решения при неудачном выборе начального вектора. Метод Леверрье, основанный на формулах Ньютона для сумм степеней корней алгебраического уравнения, весьма трудоемок, так как приходится подсчитывать высокие степени исходной матрицы.

[1] Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И. А. Марон. – М.: Наука, 1966. – 664 с.

[2] Фаддеев, Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. – М.: Гостехиздат, 1950. – 656 с.

Идеи эффективного метода приближенного вычисления собственных чисел и собственных функций возмущенных самосопряженных операторов, названного авторами методом регуляризованных следов (РС), были сформулированы в работе В. А. Садовничего и В. В. Дубровского[3]. При этом метод РС основан не на матричном представлении дискретных операторов, а на спектральных характеристиках невозмущенного оператора и спектре возмущенного оператора.

В диссертации теоретически обосновывается новый численный метод РС для вычисления значений собственных функций дискретных полуограниченных снизу операторов в узлах дискретизации. Приведены многочисленные примеры нахождения методом РС значений собственных функций при исследовании математических моделей гидродинамической теории устойчивости, электрических колебаний в протяженной линии и спектральных задач для возмущенного оператора Лапласа.

Рассмотрим дискретный полуограниченный снизу оператор T и ограниченный оператор P, заданные в сепарабельном гильбертовом пространстве H с областью определения в D. Предположим, что известны собственные числа $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора T, занумерованные в порядке неубывания их действительных величин, и ортонормированные собственные функции $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, отвечающие этим собственным числам. Пусть собственные функции $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ образуют базис в H. Обозначим через ν_n кратность собственного числа λ_n, а количество всех неравных друг другу λ_n, лежащих внутри окружности T_{n_0} радиуса $\rho_{n_0} = \dfrac{|\lambda_{n_0+1} + \lambda_{n_0}|}{2}$ с центром в начале координат комплексной плоскости, через n_0. Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные числа оператора $T+P$, занумерованные в порядке неубывания их действительных частей, а $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – соответствующие им собственные функции. Если для всех $n \geq n_0$, выполняются неравенства $q_n = \dfrac{2||P||}{|\lambda_{n+\nu_n} - \lambda_n|} < 1$, тогда $m_0 = \sum\limits_{n=1}^{n_0} \nu_n$ собственных

[3]Садовничий, В. А. Замечание об одном новом методе вычислений собственных значений и собственных функций дискретных операторов / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. – М.: МГУ, 1994. – Вып. 17. – С. 244–248.

функций оператора $T+P$ являются решениями системы нелинейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{m_0} \mu_j^p u_j(x)\overline{u}_j(y) = \sum_{j=1}^{m_0} \lambda_j^p v_j(x)\overline{v}_j(y) + \sum_{k=1}^{t} \alpha_k^{(p)}(m_0,x,y) + \varepsilon_t^{(p)}(m_0,x,y), \qquad (1)$$

здесь $\alpha_k^{(p)}(m_0,x,y) = \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int\limits_{T_{n_0}} \lambda^p [K_T(x,z_k,\lambda) \circ P_{z_k}]^k \circ K_T(z_k,y,\lambda) d\lambda$ – k-тые поправки теории возмущений к „взвешенной“ спектральной функции оператора $T+P$ целого порядка p; $K_T(x,y,\lambda)$ – ядро резольвенты $R_\lambda(T)$ оператора T; операция „$\circ$“ вводится по правилу $(K \circ P \circ Q)(x,y,\lambda) = \int\limits_D K(x,z,\lambda) P_z Q(z,y,\lambda) dz$, а $\varepsilon_t^{(p)}(m_0,x,y) = \sum\limits_{m=t+1}^{\infty} \alpha_m^{(p)}(m_0,x,y)$, $\forall t \in N$ – остатки сумм функциональных рядов Рэлея-Шредингера.

Математическая модель нахождения значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов основывается на системе уравнений (1), так как правые части уравнений (1) явно выражаются через характеристики невозмущенного оператора T и возмущающего оператора P, а значения „взвешенных“ поправок теории возмущений $\alpha_k^{(p)}(m_0,x,y)$ вычисляются с помощью теории вычетов. Предельные абсолютные погрешности найденных значений произведений $u_n(x)\overline{u}_n(y)$ первых собственных функций оператора $T+P$ в узлах дискретизации будут зависеть от того с какой точностью вычислены собственные числа $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора $T+P$ и с какой точностью найдены суммы функциональных рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0,x,y)$ „взвешенных“ поправок теории возмущений.

Цель и задачи работы. Целью работы является разработка численного метода, позволяющего исследовать математические модели нахождения значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов, и создание пакета программ, позволяющего находить при вычислительном эксперименте численные значения собственных функций исследуемых задач.

Для достижения данной цели поставлены следующие задачи:

1. Построение математических моделей нахождения значений первых собственных функций задач Орра-Зоммерфельда, электрических колебаний в протяженной линии, спектральных задач для возмущенного оператора Лапласа.

2. Создание эффективных алгоритмов вычисления значений „взвешенных“ поправок теории возмущений $\alpha_k^{(p)}(m_0, x, y)$ оператора $T + P$.

3. Разработка способов оценки сходимости метода и нахождение предельных абсолютных погрешностей вычисления значений первых собственных функций оператора $T + P$.

4. Разработка численного метода вычисления значений собственных функций $u_n(x)$ из произведений вида $u_n(x)\overline{u}_n(y)$.

5. Программная реализация алгоритма метода регуляризованных следов нахождения значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов.

Методы исследования. Для решения поставленных задач использовались методы функционального анализа, спектрального анализа линейных операторов, теории возмущений и вычислительной математики. В диссертационном исследовании основными являются методы, разработанные В. А. Садовничим, В. В. Дубровским и С. И. Кадченко. Для вычисления собственных чисел возмущенных самосопряженных операторов использовалась модификация метода регуляризованных следов, полученная в работах С. И. Кадченко.

Научная новизна диссертации заключается в разработке математической модели нахождения значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов. Модель применима для широкого класса дифференциальных и интегральных операторов. Доказана сходимость сумм функциональных рядов Рэлея-Шредингера возмущенных дискретных операторов и получены оценки их остатков. Впервые получены формулы нахождения „взвешенных“ поправок теории возмущений и оценки для них. Создан алгоритм вычисления значений собственной функции возмущенного самосопряженного оператора по значению произведения собственной функции возмущенного оператора и ей сопряженной. Разработан и реализован в виде пакета программ для ЭВМ алгоритм численного метода вычисления значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов.

Теоретическая значимость. Разработка математических моделей, в основе которых лежит новый метод нахождения значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов, расширяет возможности в решении спектральных и краевых задач. Полученные в работе новые численные методы позволяют эффективно восстанавливать первые собственные функции краевых, начально-краевых и спектральных задач. Причем в их основе лежат неитерационные методы. Результаты диссертации могут быть использованы при дальнейших исследованиях в спектральной теории операторов и разработке модификаций метода РС.

Практическая значимость. Результаты диссертации применимы к задачам линейной гидродинамической теории устойчивости, электрических колебаний в протяженной линии, сейсморазведки, идентификации композитных материалов, проблем неразрушающего контроля, нелинейных эволюционных уравнений, редукции измерений за характеристику направленности антенны, обработки изображений (иконика), определения функций распределения истинных конфигураций тройных звезд и другим задачам, приводящим к нахождению собственных функций возмущенных дискретных операторов. На основе результатов диссертации создан и зарегистрирован пакет программ позволяющий вычислять собственные функции задач, порожденных линейными дифференциальными и интегральными операторами.

Апробация работы. Результаты, вошедшие в диссертацию докладывались: на VI, VII Международных симпозиумах по фундаментальным и прикладным проблемам науки (Непряхино Челябинской области, ЮУрГУ, 2011, 2012 гг.); на Всероссийской конференции „Статистика. Моделирование. Оптимизация“ (г. Челябинск, ЮУрГУ, 2011 г.); на Всероссийской научной конференции с международным участием „Дифференциальные уравнения и их приложения“ (г. Стерлитамак, ГАНУ „ИПИ“ Академии наук РБ, 2011 г.); на XLIX, L внутривузовских научных конференциях преподавателей МаГУ, (г. Магнитогорск, МаГУ, 2011, 2012 гг.); на IV, V Международных научных конференциях „Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования“ (г. Воронеж, ВГУ, 2011, 2012 гг.); Spectral Theory and Differential Equations STDE-2012 International Conference (Kharkiv, B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of NASU, 2012 г.); на Всероссийской научно-практической конференции „Физико-математические науки и образование“ (Магнитогорск, МаГУ, 2012); на Научно-практической конференции с международным участием „Математические методы и информационные технологии в социально-экономической сфере“ (Уфа, ВЗФЭИ, 2012 г.); на Международной конференции „Нелинейные уравнения и комплексный анализ“ (г. Уфа, Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, 2013 г.).

Результаты работы обсуждались на научном семинаре профессора Г. А. Свиридюка в Южно-Уральском Государственном университете (г. Челябинск), научном семинаре кафедры прикладной математики и вычислительной техники Магнитогорского государственного университета под руководством профессора С. И. Кадченко.

Научные результаты, содержащиеся в работе соискателя „Нахождение собственных чисел и собственных функций возмущенных самосопряженных операторов методами регуляризованных следов“ признаны Межрегиональным советом по науке и технологиям в качестве основы для подготовки и последующей защиты диссертации на соискание ученой степени кандидата наук (№197 18.10.2012 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 20 работ, в том числе 6 статей в ведущих российских рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК. Получено свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ. В работах [2] – [6] научному руководителю Кадченко С. И. принадлежит общая постановка задач, а диссертанту – все основные полученные результаты.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и двух приложений. Объем диссертации 119 страниц. Список литературы содержит 127 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** представлена постановка задачи, обосновывается актуальность темы исследования, теоретическая и практическая значимость, описаны методы исследования, сформулированы цели, задачи и научная новизна диссертации. Кратко излагается содержание работы.

Первая глава состоит из четырех параграфов, в ней рассмотрены формулировки теорем и определения спектральной теории линейных операторов, которые используются в диссертации. В первом параграфе приведены основные определения и утверждения спектральной теории линейных операторов. Второй параграф содержит основные свойства дискретных и резольвентных операторов. Третий параграф описывает свойства дискретных операторов, позволяющие получить оценки сумм функциональных рядов Рэлея-Шредингера. В четвертом параграфе рассматривается метод регуляризованных следов нахождения собственных чисел возмущенных самосопряженных операторов.

Вторая глава состоит из пяти параграфов и посвящена теоретическому обоснованию метода регуляризованных следов вычисления значений первых собственных функций возмущенных самосопряженных операторов. В первом параграфе получены оценки „взвешенных“ поправок теории возмущений.

Теорема 1 (2.1.3).[4] *Пусть T – дискретный полуограниченный снизу оператор, а P – ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Если для всех $n \geq n_0$ выполняются неравенства*

$$q_n = \frac{2||P||}{|\lambda_{n+\nu_n} - \lambda_n|} < 1,$$

то для „взвешенных“ поправок теории возмущений $\alpha_m^{(p)}(m_0, x, y)$ оператора $T + P$ справедливы оценки:

$$|\alpha_m^{(p)}(m_0, x, y)| \leq C_0^4 \rho_{n_0}^{p+1} ||P|| q_{n_0}^{m-1} S_{m_0}.$$

Здесь $S_{m_0} = \sup\limits_{\lambda_i} \Big(\sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq m_0}}^{\infty} \dfrac{1}{|\lambda_{m_0} - \lambda_i|} \Big)^2$, $|v_i(x)| \leq C_0 \ \forall i = \overline{1, \infty}.$

Используя Теорему 1 (2.1.3) доказывается сходимость сумм функциональных рядов Рэлея-Шредингера.

Теорема 2 (2.1.4). *Если для всех $n \geq n_0$ выполняются неравенства $q_n < 1$, то функциональные ряды $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \alpha_m^{(p)}(m_0, x, y)$ „взвешенных“ поправок теории возмущений оператора $T + P$ абсолютно сходятся.*

[4] В скобках указана нумерация в диссертации

Используя Теорему 2 (2.1.4) получены оценки остатков сумм функциональных рядов Рэлея-Шредингера.

Теорема 3 (2.1.5). *Если для всех $n \geq n_0$ выполняются неравенства $q_n < 1$, то для остатков сумм функциональных рядов Рэлея – Шредингера $\varepsilon_t^{(p)}(m_0, x, y)$ оператора $T + P$ справедливы оценки:*

$$|\varepsilon_t^{(p)}(m_0, x, y)| \leq C_0^4 \rho_{n_0}^{p+1} S_{m_0} ||P|| \frac{q_{n_0}^t}{1 - q_{n_0}}.$$

Здесь $S_{m_0} = \sup\limits_{\lambda_i} \Big(\sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq m_0}}^{\infty} \dfrac{1}{|\lambda_{m_0} - \lambda_i|} \Big)^2$, $|v_i(x)| \leq C_0\ \forall i = \overline{1, \infty}$.

Во втором параграфе получены формулы нахождения „взвешенных" поправок теории возмущений и приведены аналитические формулы нахождения первых четырех „взвешенных" поправок теории возмущений, не содержащие производных.

Теорема 4 (2.2.1). *Если для всех $n \geq n_0$ выполняются неравенства $q_n < 1$, то „взвешенные", поправки теории возмущений $\alpha_k^{(p)}(m_0, x, y)$ для любых натуральных k, p и m_0 можно найти по формулам:*

$$\alpha_k^{(p)}(m_0, x, y) = -\sum_{n=1}^{m_0} \sum_{j_1, \ldots, j_{k+1}=1}^{\infty} v_{j_1}(x) \overline{v}_{j_{k+1}}(y) r_k^{(p)}(n, j_1, \ldots, j_{k+1}) \prod_{m=1}^{k} V_{j_m j_{m+1}},$$

где $r_k^{(p)}(n, j_1, \ldots, j_{k+1}) = \begin{cases} 0,\ \forall j_m \neq n, m = \overline{1, k+1}; \\ \frac{1}{k!} \lim\limits_{\lambda \to \lambda_n} \frac{d^k}{d\lambda^k} \lambda^p,\ l = k+1; \\ \frac{1}{(l-1)!} \lim\limits_{\lambda \to \lambda_n} \frac{d^{l-1}}{d\lambda^{l-1}} \left(\frac{\lambda^p}{\prod\limits_{m=1}^{k-l+1} (\lambda - \lambda_{jm})} \right),\ 0 < l \leq k; \end{cases}$

$V_{i,j} = (Pv_i, v_j)$ – скалярное произведение; l- число совпадений $j_m = n$, $m = \overline{1, k+1}$.

В третьем параграфе приведена схема работы с системой нелинейных уравнений, для эффективного получения значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов в узлах дискретизации.

Теорема 5 (2.3.1). *Если T – дискретный полуограниченный снизу оператор, а P – ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H, с областью определения в D, и для всех натуральных $n \geq n_0$ выполняются* *неравенства $q_n < 1$, то значение произведения собственной функции $u_n(x)$ и ей сопряженной $\overline{u}_n(y)$, при любых значениях аргументов $x,\ y \in D$, можно найти по формулам:*

$$u_n(x)\overline{u}_n(y) = \frac{1}{\mu_n}\Big(\lambda_n v_n(x)\overline{v}_n(y) + \sum_{k=1}^{t}[\alpha_k^{(1)}(n,x,y) - \alpha_k^{(1)}(n-1,x,y)]\Big) + \widetilde{\varepsilon}_t^{(1)}(n,x,y),$$

где для $\widetilde{\varepsilon}_t^{(1)}(n,x,y)$ справедливы оценки

$$|\widetilde{\varepsilon}_t^{(1)}(n,x,y)| \leq \frac{2||P||}{\mu_n} C_0^4 S_n \rho_n^2 \frac{q^t}{1-q},\ \forall t \in N,\ n = \overline{1, m_0}.$$

Здесь $S_n = \sup\limits_{\lambda_i}\Big(\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq n}}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_n - \lambda_i|}\Big)^2$, $|v_i(x)| \leq C_0\ \forall i = \overline{1,\infty}$, $q = \max\limits_{n\geq 1} q_n$.

В четвертом параграфе составлен алгоритм применения нового метода РС. В пятом параграфе описывается пакет программ, написанный в вычислительной среде Maple, созданный на основе алгоритма метода РС вычисления значений собственных функций возмущенных дискретных операторов.

Третья глава состоит из пяти параграфов и посвящена построению математических моделей нахождения значений собственных функций задач гидродинамической теории устойчивости и электрических колебаний. В первом параграфе рассматривается спектральная задача нахождения значений собственных функций возмущенного оператора Лапласа, заданного на прямоугольной области. Во втором параграфе рассматривается модель плоскопараллельного течения вязкой несжимаемой жидкости, линеаризованное уравнение малых возмущений которой имеет вид: $(T_o^2 + U_o - \beta T_o)\varphi = 0$, где $T_o = -\dfrac{d^2}{dy^2} + \alpha^2$; $U_o = i\alpha R\Big(UT_o + \dfrac{d^2U}{dy^2}\Big)$; $\beta = i\alpha Rc$ – комплексный спектральный параметр; α – волновое число, $U(y)$ – скорость основного течения вязкой жидкости в безразмерной форме. К задаче Орра-Зоммерфельда применяется метод РС. В третьем параграфе содержится описание алгоритма численного метода РС и программы нахождения значений первых собственных функций в узлах дискретизации задачи Орра-Зоммерфельда и приведены результаты численных расчетов. В четвертом параграфе рассматривается математическая модель электрических колебаниях в протяженной линии, собственные колебания которой описываются собственными значениями задачи Штурма-Лиувилля:

$$-y''(x,\mu) + q(x)y(x,\mu) = \mu y(x,\mu),$$
$$y'(0,\mu) - (p_1 + p_2\mu)y(0,\mu) = 0,$$
$$y'(1,\mu) + (p_3 + p_4\mu)y(1,\mu) = 0,$$

где $p_1 = \dfrac{C}{C_0}$, $p_2 = -\dfrac{L_0}{L}$, $p_3 = \dfrac{C}{\tilde{C}_0}$, $p_4 = -\dfrac{\tilde{L}_0}{L}$, C и L – коэффициенты емкости и самоиндукции, рассчитанные на единицу длины провода.

В пятом параграфе описывается алгоритм численного метода РС и программа нахождения значений первых собственных функций в узлах дискретизации краевой задачи Штурма-Лиувилля.

В **заключении** представлены выводы по результатам исследований и соответствие диссертационной работы паспорту специальности 05.13.18 - математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

В **приложении 1** представлены численные расчеты вычисления значений собственных функций возмущенного оператора Лапласа при различных значениях возмущающего оператора.

В **приложении 2** представлено свидетельство о регистрации электронного ресурса „Нахождение значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов методом регуляризованных следов“.

Результаты, выносимые на защиту.

1. Математические модели нахождения значений первых собственных функций задач Орра-Зоммерфельда, электрических колебаний в протяженной линии и спектральных задач для возмущенного оператора Лапласа.

2. Метод нахождения „взвешенных“ поправок теории возмущений дискретных операторов.

3. Способы оценки остатков сумм функциональных рядов Рэлея-Шредингера, используемые для нахождения предельных абсолютных погрешностей значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов.

4. Численный метод вычисления значений собственных функций $u_n(x)$ из произ-

ведений вида $u_n(x)\overline{u}_n(y)$.

5. Пакет программ для нахождения значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов в узлах дискретизации.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в научных журналах и изданиях, которые включены в перечень российских рецензируемых научных журналов и изданий для опубликования основных научных результатов диссертаций:

[1] Какушкин, С. Н. Математическое моделирование спектральной задачи об электрических колебаниях в протяженной линии методом регуляризованных следов / С. Н. Какушкин // Вестник ЮУрГУ. Серия „Математическое моделирование и программирование". – 2013. Т. 6, №3. – С. 125 – 129.

[2] Кадченко, С. И. Нахождение первых четырех поправок теории возмущений дискретных полуограниченных снизу операторов с произвольной кратностью собственных значений / С. И. Кадченко, С. Н. Какушкин // Вестник ЮУрГУ. Серия „Математическое моделирование и программирование". – 2011. – №25 (242), вып. 9. – С. 16–21.

[3] Кадченко, С. И. Нахождение значений первых собственных функций возмущенных дискретных операторов с простым спектром / С. И. Кадченко, С. Н. Какушкин // Вестник ЮУрГУ. Серия „Математическое моделирование и программирование". – 2012. – №5 (264), вып. 11. – С. 25–32.

[4] Кадченко, С. И. Вычисление значений собственных функций дискретных полуограниченных снизу операторов методом регуляризованных следов / С. И. Кадченко, С. Н. Какушкин // Вестник СамГУ - Естественнонаучная серия. – 2012. – №6 (97). – С. 13–21.

[5] Кадченко, С. И. Численные методы нахождения собственных чисел и собственных функций возмущенных самосопряженных операторов / С. И. Кадченко,

С. Н. Какушкин // Вестник ЮУрГУ. Серия „Математическое моделирование и программирование“. – 2012. – №27 (286), вып. 13. – С. 45–57.

[6] Кадченко, С. И. Алгоритм нахождения значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов методом регуляризованных следов / С. И. Кадченко, С. Н. Какушкин // Вестник ЮУрГУ. Серия „Математическое моделирование и программирование“. – 2012. – №40 (299), вып. 14. – С. 71–76.

Другие научные публикации:

[7] Какушкин, С. Н. Нахождение значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов методом регуляризованных следов [Электронный ресурс] / С. Н. Какушкин. - 45 Мб. - 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). Систем. требования: ПК Pentium, Windows 2000, Microsoft Internet Explorer 6.0. - Свидетельство о регистрации электронного ресурса. - М.: ОФЭРНиО ГАН „РАО“. - №18420 от 28.06.2012.

[8] Кадченко, С. И. Вычисление первых поправок теории возмущений дискретных операторов с кратным спектром / С. И. Кадченко, С. Н. Какушкин // Вестник МаГУ. Математика. – Магнитогорск: МаГУ, 2010. – Вып. 12. – С. 35–42.

[9] Кадченко, С. И. Нахождение собственных функций возмущенных самосопряженных операторов с кратным спектром методом регуляризованных следов / С. И. Кадченко, С. Н. Какушкин // Фундаментальные и прикладные проблемы науки. Материалы IV международного симпозиума. – М.: РАН, 2011. –Т. 1. – С. 12–15.

[10] Кадченко, С. И. Новый метод нахождения первых собственных функций дискретных операторов / С. И. Кадченко, С. Н. Какушкин // Статистика. Моделирование. Оптимизация: сборник трудов Всероссийской конференции. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2011. – С. 128–131.

[11] Кадченко, С. И. Методика нахождения значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов / С. И. Кадченко, С. Н. Какушкин //

Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования „ПМТУММ – 2012“: материалы V Международной конференции. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. – С. 147–149.

[12] Кадченко, С. И. Численный метод нахождения собственных чисел и алгоритм вычисления значений собственных функций возмущенных дискретных операторов / С. И. Кадченко, С. Н. Какушкин // Вестник МаГУ. Математика. – Магнитогорск: МаГУ, 2012. – Вып. 14. – С. 96–115.

[13] Кадченко, С. И. Метод регуляризованных следов / С. И. Кадченко, С. Н. Какушкин // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: Труды международной научной конференции. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2013. – С. 47 – 54.

[14] Какушкин, С. Н. Алгоритм вычисления значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов / С. Н. Какушкин // Физико-математические науки и образование: сборник трудов участников Всероссийской научно-практической конференции. – Магнитогорск: МаГУ, 2012. – Вып. 12. – С. 87–89.

[15] Какушкин, С. Н. Нахождение значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов методом регуляризованных следов [Электронный ресурс] / С. Н. Какушкин // Хроники объединенного фонда электронных ресурсов "Наука и образование". – 2012, №6 (37) июнь. – Режим доступа: http://ofernio.ru/portal/newspaper/ofernio/2012/6.doc

[16] Какушкин, С. Н. Нахождение поправок теории возмущений к „взвешенной“ спектральной функции возмущенного самосопряженного оператора / С. Н. Какушкин, С. И. Кадченко // Физико-математические науки и образование: сборник трудов участников Всероссийской научно-практической конференции. – Магнитогорск: МаГУ, 2012. – Вып. 12. – С. 89–93.

[17] Какушкин, С. Н. Нахождение собственных чисел и собственных функций возмущенных самосопряженных операторов методами регуляризованных следов

/ С. Н. Какушкин, С. И. Кадченко, А. И. Кадченко // Фундаментальные и прикладные проблемы науки. Материалы VII Международного симпозиума. – М.: РАН, 2012. – Т. 1. – С. 32–42.

[18] Какушкин, С. Н. Численный метод вычисления значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов / С. Н. Какушкин, С. И. Кадченко // Математические методы и информационные технологии в социально-экономической сфере: Сб. науч. тр. – Уфа: Изд-во Аркаим, 2012. – С. 53–55.

[19] Какушкин, С. Н. Численный метод нахождения значений собственных функций дискретных операторов методом регуляризованных следов / С. Н. Какушкин // Нелинейные уравнения и комплексный анализ. – Уфа, 2013. – С. 33–35.

[20] Какушкин, С. Н. Математическое моделирование нахождения значений собственных функций задачи гидродинамической теории устойчивости Орра-Зоммерфельда методом регуляризованных следов / С. Н. Какушкин, С. И. Кадченко // Вестник ЮУрГУ. Серия „Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника". – 2013. – Т. 13, №3. – С. 30–36.

[21] Kadchenko, S. I. Firsts „weighted" correction of the perturbation theory for the perturbed self-adjoin operators finding / S. I. Kadchenko, S. N. Kakushkin // Spectral Theory and Differential Equations STDE-2012 International Conference: book of abstract. – Kharkiv: B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of NASU, 2012. – P. 49–50.

Издается в авторской редакции

Подписано в печать 25.09.2013 г.

Формат 60×84 1/16. Усл. печ. л. 1,00. Уч.-изд. л. 1,00.

Тираж 100 экз. Заказ 341.

Издательство Магнитогорского государственного университета

455038, Магнитогорск, пр. Ленина, 114

Типография МаГУ