На правах рукописи

Баязитова Альфия Адыгамовна

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ В МОДЕЛЯХ ХОФФА

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

ЧЕЛЯБИНСК – 2011

Работа выполнена на кафедре уравнений математической физики Южно-Уральского государственного университета.

Научный руководитель – доктор физико-математических наук,
профессор СВИРИДЮК Георгий Анатольевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор МЕНИХЕС Леонид Давидович
доктор физико-математических наук,
доцент СУКАЧЕВА Тамара Геннадьевна

Ведущая организация – Воронежский государственный университет

Защита состоится 5 октября 2011 года, в 12 часов, на заседании диссертационного совета Д 212.298.14 при Южно-Уральском государственном университете, по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, ауд. 1001.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского государственного университета.

Автореферат разослан "____" ________________ 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, профессор Л. Б. Соколинский

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Цели работы. Пусть $\mathbf{G}(\mathfrak{V};\mathfrak{E})$ – конечный связный ориентированный граф, где $\mathfrak{V}=\{V_i\}$ — множество вершин, а $\mathfrak{E}=\{E_j\}$ — множество ребер, причем каждое ребро E_j имеет длину $l_j\in\mathbb{R}_+$ и площадь поперечного сечения $d_j\in\mathbb{R}_+$. На графе $\mathbf{G}(\mathfrak{V};\mathfrak{E})$ рассмотрим начально-краевую и обратную (в случае $n=2$) задачи

$$\begin{aligned} &u_k(0,t)=u_m(0,t)=u_n(l_n,t)=u_p(l_p,t),\\ &E_k,E_m\in E^{\alpha}(V_i),E_n,E_p\in E^{\omega}(V_i)\end{aligned} \tag{1}$$

$$\sum_{E_k\in E^{\alpha}(V_i)} d_k u_{kx}(0,t)-\sum_{E_m\in E^{\omega}(V_i)} d_m u_{mx}(l_m,t)=0, \tag{2}$$

$$u_j(x,0)=u_{j0}(x),\quad x\in(0,l_j), \tag{3}$$

$$\alpha_j u_{0j}(0)+\beta_j u_{0j}^3(0)=\varphi_j,\quad \alpha_j u_{0j}(l_j)+\beta_j u_{0j}^3(l_j)=\psi_j \tag{4}$$

для уравнений Хоффа

$$\lambda_j u_{jt}+u_{jxxt}=\alpha_{1j}u_j+\alpha_{2j}u_j^3+...+\alpha_{nj}u_j^{2n-1}, \tag{5}$$

моделирующих динамику конструкции из двутавровых балок.

Здесь параметры $\lambda_j\in\mathbb{R}_+$ характеризуют нагрузку на j-ую балку, а $\alpha_{ij}\in\mathbb{R}$, $i=1,...,n$ характеризуют свойства материала j-ой балки, φ_j, $\psi_j\in\mathbb{R}$ показывают изменение скорости динамики выпучивания в начале и конце балки в начальный промежуток времени. Через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество ребер с началом (концом) в вершине V_i. Условие (1) требует, чтобы все решения были непрерывными в вершинах графа; а условие (2) – аналог условия Кирхгоффа – в случае, когда граф состоит из единственной дуги с двумя вершинами, превращается в условие Неймана.

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^s$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Уравнение Хоффа

$$(\lambda+\Delta)u_t=\alpha_1u+\alpha_2u^3+...+\alpha_nu^{2n-1} \tag{6}$$

в случае $s=1$ моделирует динамику выпучивания двутавровой балки, где параметр $\lambda\in\mathbb{R}_+$ характеризуют нагрузку на балку, а параметры $\alpha_i\in\mathbb{R}$ характеризуют свойства материала балки.

Под прямой задачей понимается задача Коши – Дирихле

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in\Omega;\quad u(x,t)=0,\ (x,t)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}, \tag{7}$$

где искомая функция $u = u(x,t)$, $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$ имеет физический смысл отклонения балки от вертикали, т.е. от положения равновесия.

В случае $n = 2$ (обозначив $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$), $n = 3$ и произвольного n будем рассматривать задачу нахождения не только решения уравнения (6), но и параметров α_i, $i = 1, ..., n$ для того, чтобы узнать различия между имеющимся материалом балки и предполагаемым. Для решения обратной задачи вводятся дополнительные условия

$$\int\limits_{\Omega} x^j(\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_0^3 + ... + \alpha_n u_0^{2n-1})dx = \mu_j, \quad j = 0, ..., n-1, \tag{8}$$

характеризующие моменты изменения скорости динамики выпучивания балки. Нашей **целью** является качественное и численное исследование разрешимости задач (1)–(5) и (6)–(8) при различных значениях параметров. Для достижения поставленных целей необходимо было решить следующие задачи.

1. Исследовать морфологию фазовых пространств уравнений Хоффа, заданных на геометрическом графе и в области конечномерного пространства.

2. Получить условия разрешимости прямых и обратных задач.

3. Разработать алгоритмы численного исследования прямых и обратных задач для уравнений Хоффа, а также построения фазового пространства.

4. На основе алгоримов спроектировать и реализовать программный комплекс, использующий предложенные методы.

5. Провести численные эксперименты для анализа эффективности предложенного подхода.

Качественное исследование задач (1)–(5) и (6)–(8) облегчается тем обстоятельством, что они обе в подходящим образом подобранных банаховых пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ редуцируются к задаче Коши для полулинейного уравнения соболевского типа

$$u(0) = u_0, \tag{9}$$

$$L\dot{u} = Mu + N(u). \tag{10}$$

Актуальность темы. В литературе уравнения и системы уравнений, неразрешенные относительно старшей производной называют уравнениями и системами соболевского типа, поскольку именно работы С.Л. Соболева послужили началом систематического изучения таких уравнений. В настоящее время теория уравнений соболевского типа переживает пору бурного расцвета. Сформировались научные направления, вокруг которых сложились научные школы.

Данная диссертационная работа выполнена в рамках направления, возглавляемого Г.А. Свиридюком.

Результаты исследований обратных задач для линейных уравнений соболевского типа принадлежат А.И. Кожанову, С.Г. Пяткову и Н.Л. Абашеевой, Г.А. Свиридюку и К.С. Ощепкову, В.Е. Федорову и А.В. Уразаевой, A. Favini и A.Lorenzo.

Уравнение Хоффа на отрезке первым начал изучать Н.А. Сидоров, М.В. Фалалеев и О.А. Романова. Уравнение Хоффа на графе впервые исследовали Г.А. Свиридюк и В.В. Шеметова.

Актуальность диссертации заключается в качественном и численном исследовании моделей Хоффа, адекватных следующим прикладным задачам. Первая – изучение прямых и обратных задач в процессе выпучивания двутавровой балки, а вторая – изучения прямых и обратных задач в процессе выручивания конструкции из двутавровых балок.

Методы исследования. Основным методом диссертационного исследования является метод фазового пространства. Кроме того, в основе численных экспериментов лежит метод Галеркина.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1. Предложен метод исследования прямых и обратных задач в моделях Хоффа, базирующийся на методе фазового пространства.

2. Разработан новый алгоритм исследования прямых и обратных задач в моделях Хоффа.

3. Выполнена реализация алгоритма исследования прямых и обратных задач для уравнений Хоффа в виде программного комплекса для персональных компьютеров.

Теоретическая значимость работы заключается в том, что в ней сформулированы и доказаны условия разрешимости прямых и обратных задач для уравнений Хоффа, заданных на конечном связном ориентированном графе и в ограниченной области.

Практическая значимость работы заключается в том, что предложенный программный комплекс может использоваться для нахождения численного решения прямых и обратных задач в моделях Хоффа, заданных на графе и в области.

Апробация работы. Результаты, изложенные в диссертации, были представлены на Всероссийской конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения" (г. Самара, 2007), Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы" (г. Стерлитамак, 2008), Международной конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач", посвященной 100-летию со дня рождения В.К. Иванова (г. Екатеринбург, 2008), Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений" (г. Новосибирск, 2008), X Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (г. Санкт-Петербург, 2009), на Воронежской зимней математической школе им. С.Г. Крейна 2010 (г. Воронеж, 2010). Также результаты докладывались на первой и второй научной конференции аспирантов и докторантов Южно-Уральского государственного университета (г. Челябинск, 2009, 2010), на семинаре чл. - корр. РАН В.В. Васина в Институте математики и механики УРО РАН и на семинарах по уравнениям соболевского типа профессора Г. А. Свиридюка в ЮУрГУ (г. Челябинск).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 15 работах, причем работы [1 – 4] опубликованы в журналах, включенных в список ВАК, получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [5]. Необходимо отметить, что во всех работах, выполненных в соавторстве с научным руководителем, последнему принадлежит только постановка задачи. Все доказательства выполнены автором диссертации самостоятельно.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Объем диссертации составляет 124 страницы. Библиография содержит 107 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, определяется цель работы, дается обзор литературы по исследуемой проблематике.

Первая глава носит вспомогательный характер и состоит из 6 параграфов. Первый параграф содержит определения и теоремы об относительно p - ограниченных операторах. Во втором параграфе рассматриваются следующие определения: карты, атласа, банахова C^k - многообразия, касательного расслоения C^k - многообразия, векторного поля и теорема Коши. В третьем параграфе определяется понятие решения, фазового пространства, простоты фазового пространства для полулинейных уравнений соболевского типа. В четвертом параграфе определяются пространства Соболева, пространства с негативной и позитивной нормами и приводятся теоремы вложения Соболева и Кондрашова – Реллиха. Пятый параграф содержит определения радиально непрерывного, монотонного, коэрцитивного оператора, теорему Вишика – Минти – Браудера, теорему о неявной функции. Шестой параграф посвящен описанию свойств собственных значений и собственных функций задачи Штурма – Лиувилля на геометрическом графе.

Вторая глава состоит из 4 параграфов и содержит исследование прямых и обратных задач уравнений Хоффа, определенных на графе. В **п. 2.1** исследуется начально-краевая задача (1) – (3) для уравнений Хоффа (5), заданных на графе. Введем гильбертово пространство

$$L_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, ..., g_j, ...), g_j \in L_2(0, l_j)\}$$

со скалярным произведением

$$\langle g, h\rangle = \sum_j d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx$$

и банахово пространство

$$\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, ..., u_j, ...) : u_j \in W_2^1(0, l_j) \text{ и выполнено } (1)\}$$

с нормой

$$||u||^2_{\mathfrak{U}} = \sum_j d_j \int\limits_0^{l_j} (u^2_{jx} + u^2_j)dx.$$

Обозначим через $\mathfrak{F}$ сопряженное к $\mathfrak{U}$ относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$ банахово пространство. Построим операторы $L, M, N : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$

$$\langle Lu, v\rangle = \sum_j d_j(\lambda_j \int_0^{l_j} u_j v_j dx - \int\limits_0^{l_j} u_{jx} v_{jx} dx),$$
$$\langle Mu, v\rangle = \sum_j \alpha_{1j} d_j \int_0^{l_j} u_j v_j dx,$$
$$\langle N(u), v\rangle = \sum_j d_j \left(\alpha_{2j} \int_0^{l_j} u_j^3 v_j dx + ... + \alpha_{nj} \int_0^{l_j} u_j^{2n-1} v_j dx\right),$$

тем самым редуцируя задачу (1) – (3), (5) к задаче (9) – (10).

Операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (т.е. линейны и непрерывны), причем оператор L фредгольмов (т.е. ind $L = 0$), а оператор M компактен.

Лемма 1 *(i) Оператор M $(L,0)$-ограничен в случае* $\ker L = \{0\}$.
(ii) Оператор M $(L,0)$-ограничен, если $\ker L \neq \{0\}$, $\alpha_{1j} \neq 0$ *при любом j и все α_{1j} имеют одинаковый знак.*

Лемма 2 *При любых $\alpha_{kj} \in \mathbb{R}$, $k = 2, ..., n$ оператор $N \in C^{\infty}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.*

Для исследования морфологии фазового пространства задачи (1) – (3) для уравнений (5) выберем в ядре $\ker L$ ортонормированный (в смысле $\langle\cdot,\cdot\rangle$) базис, т.е. $\ker L = \operatorname{span}\{\chi_k : k = 1, 2, ..., l\}$, и отождествим его с базисом в coker L. Рассмотрим множество

$$\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I} - Q)(Mu + N(u)) = 0\}.$$

Теорема 1 *(i) Пусть выполнено* $\ker L = \{0\}$. *Тогда фазовым пространством уравнения (5) служит все пространство* $\mathfrak{U}$.

(ii) Пусть выполнено $\ker L \neq \{0\}$, *все коэффициенты* $\alpha_{kj} \neq 0$, $k = 1, ..., n$ *одного знака. Тогда фазовым пространством уравнения (5) служит простое многообразие* $\mathfrak{M}$.

В **п. 2.2** содержится исследование обратной задачи (1) – (5) в случае $n = 2$ для уравнений Хоффа, заданных на графе.

Лемма 3 *Пусть* $\ker L = \{0\}$. *Тогда при начальных значениях $u_0 \in \mathfrak{U}$, φ_j, $\psi_j \in \mathbb{R}$ таких, что $u_{0j}(0) \neq 0$, $u_{0j}(l_j) \neq 0$, $u_{0j}(0) \neq \pm u_{0j}(l_j)$ и $\varphi_j u_{0j}^3(l_j) \neq \psi_j u_{0j}^3(0)$, $\varphi_j u_{0j}(l_j) \neq \psi_j u_{0j}(0)$, существует единственное решение $u \in \mathfrak{U}$, α_j, $\beta_j \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ обратной задачи (1) – (5).*

Рассмотрим случай $\ker$ $L \neq \{0\}$. Пусть $\mathfrak{D}$ – множество значений $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_j, ...)$, $\psi = (\psi_1, ..., \psi_j, ...)$, при которых решениями задачи будут векторы коэффициентов α, β одного знака.

Теорема 2 *Пусть* $\ker L \neq \{0\}$. *Пусть $\varphi, \psi \in \mathfrak{D}$ и $u_0 \in \mathfrak{U}$ такие, что $u_{0j}(0) \neq 0$, $u_{0j}(l_j) \neq 0$, $u_{0j}(0) \neq \pm u_{0j}(l_j)$ и выполнено условие*

$$\sum_j \frac{d_j}{\mathfrak{d}_j} \int_0^{l_j} ((\varphi_j u_{0j}^3(l_j) - \psi_j u_{0j}^3(0))u_{0j} + (\psi_j u_{0j}(0) - \varphi_j u_{0j}(l_j))u_{0j}^3)\chi_k dx = 0.$$

Тогда существует единственное решение $u \in \mathfrak{U}$, α_j, $\beta_j \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\alpha_j\beta_j \in \mathbb{R}_+$ обратной задачи (1) – (5).

П. 2.3 посвящен описанию разработанных автором алгоритмов нахождения решения прямых и обратных задач для моделей Хоффа, заданных на графе. Рассмотрена прямая и обратная задачи (1) – (5) с условием Шоуолтера – Сидорова $\left(\lambda_j + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(u_j(x,0) - u_{j0}(x)) = 0, \quad x \in (0, l_j)$.

Теорема 3 *Пусть* $\ker L = \{0\}$ *или* $\ker L \neq \{0\}$ *и все коэффициенты* $\alpha_{sj} \neq 0$, $s = 1, ..., n$ *имеют одинаковый знак. Тогда для любого* $u_0 \in \mathfrak{U}$ *существует единственное решение задачи Шоуолтера – Сидорова для уравнений (5).*

Теорема 4 *(i) Пусть* $\ker L = \{0\}$. *Тогда при любых* $u_0 \in \mathfrak{U}$, φ_j, $\psi_j \in \mathbb{R}$ *таких, что* $u_{0j}(0) \neq 0$, $u_{0j}(l) \neq 0$, $u_{0j}(0) \neq \pm u_{0j}(l)$, $\varphi_j u_{0j}^3(l) \neq \psi_j u_{0j}^3(0)$ *и* $\varphi_j u_{0j}(l) \neq \psi_j u_{0j}(0)$ *существует единственное решение* $u \in \mathfrak{U}$, α_j, $\beta_j \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *обратной задачи (1)–(5).*

(ii) Пусть $\ker L \neq \{0\}$. *Тогда при любых* $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_j, ...) \in \mathfrak{D}$, $\psi = (\psi_1, ..., \psi_j, ...) \in \mathfrak{D}$ *и* $u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0j}, ...) \in \mathfrak{U}$ *таких, что* $u_{0j}(0) \neq 0$, $u_{0j}(l_j) \neq 0$, $u_{0j}(0) \neq \pm u_{0j}(l_j)$ *существует единственное решение* $u \in \mathfrak{U}$, α_j, $\beta_j \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\alpha_j\beta_j \in \mathbb{R}_+$ *обратной задачи (1)–(5).*

П.2.4 содержит описание комплекса программ, разработанного в вычислительной среде Maple 13.0. Для комплекса программ приведены его функциональное назначение, область применения, описана логическая структура, используемые технические средства и выходные данные. Комплекс программ, опираясь на метод Галеркина, позволяет находить приближенное численное решение задач (1)–(3), (5) и (1)–(5) и строит графическое изображение этого решения при различных значениях λ_j, показывая простоту фазового пространства.

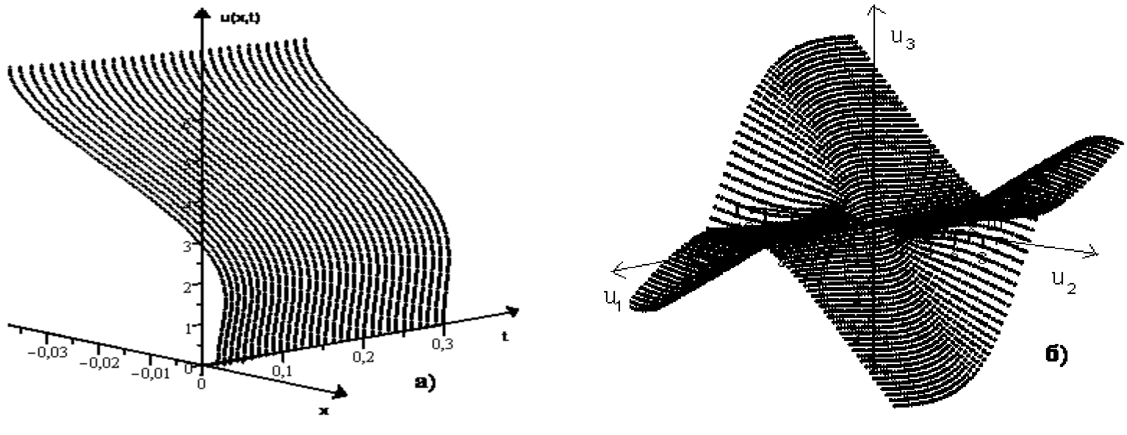

Рис. 1 Решение u=u(x,t) (а) и фазовое пространство (б) уравнения (5) при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $(u_1, u_2) = (u_1(t) + u_2(t)\cos x + u_3(t)\cos\frac{x}{2},\ u_1(t) - u_2(t)\cos x - u_3(t)\sin\frac{x}{2})$.

Третья глава состоит из 4 параграфов и содержит исследование прямых и обратных задач для уравнения Хоффа, определенного в области. В **п. 3.1** исследуется начально-краевая задача (6) – (7) для уравнения Хоффа, заданного в области. Для редукции задачи (6) – (7) к задаче Коши для абстрактного полулинейного уравнения соболевского типа задаются пространства $\mathfrak{U} = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\mathfrak{F} = W_2^{-1}(\Omega)$ и операторы

$$\langle Lu, v\rangle = \int_\Omega (\lambda uv - \nabla u \nabla v)dx, \quad \forall u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),$$
$$\langle Mu, v\rangle = \alpha_1 \int_\Omega uvdx,$$
$$\langle N(u), v\rangle = \int_\Omega (\alpha_2 u^3 + ... + \alpha_n u^{2n-1})vdx \quad \forall u, v \in L_{2n}(\Omega).$$

Операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, причем оператор L фредгольмов.

Лемма 4 *При всех* $\alpha_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *оператор* M $(L, 0)$*-ограничен.*

Лемма 5 *Оператор* $N \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ *при всех* $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = 2, ..., n$, *если* $n = 1, 2$ *при* $s = 4$ *(т.е.* $\Omega \subset \mathbb{R}^4$*),* $n = 1, 2, 3$ *при* $s = 3$ *(т.е.* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$*) и* $n \in \mathbb{N}$ *при* $s = 1, 2$ *(т.е.* $\Omega \subset \mathbb{R}$ *или* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$*).*

Для исследования морфологии фазового пространства задачи (7) для уравнений (6) выберем в ядре $\ker L$ ортонормированный базис. Таким образом, $\ker L = \operatorname{span}\{\chi_k : k = 1, 2, ..., l\}$. Построим множество

$$\mathfrak{M} = \left\{u \in \mathfrak{U} : \int_\Omega (\alpha_1 + \alpha_2 u^2 + ... + \alpha_n u^{2n-1}) u \chi_k dx = 0,\ k = 1, \ldots, m\right\}.$$

Теорема 5 *Пусть* $n = 1, 2$ *при* $s = 4$ *(т.е.* $\Omega \subset \mathbb{R}^4$*),* $n = 1, 2, 3$ *при* $s = 3$ *(т.е.* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$*) и* $n \in \mathbb{N}$ *при* $s = 1, 2$ *(т.е.* $\Omega \subset \mathbb{R}$ *или* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$*) и выполнено одно из двух условий*

(i) $\ker L = \{0\}$. *Тогда фазовым пространством уравнения (6) служит все пространство* $\mathfrak{U}$.

(ii) $\ker L \neq \{0\}$, *все коэффициенты* $\alpha_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $i = 1, ..., n$ *одного знака. Тогда фазовым пространством уравнения (6) служит простое многообразие* $\mathfrak{M}$.

В **п. 3.2** исследуются обратные задачи (6) – (8).

Лемма 6 *Пусть* $\ker\ L = \{0\}$, $n = 2$, $s \le 4$ *и выполнены условия*

$$\delta = \int\limits_{\Omega} u_0(x)dx \int\limits_{\Omega} x u_0^3(x)dx - \int\limits_{\Omega} x u_0(x)dx \int\limits_{\Omega} u_0^3(x)dx \neq 0,$$

$\int\limits_{\Omega}(\varphi x - \psi)u_0^3(x)dx \neq 0$, $\int\limits_{\Omega}(\psi - \varphi x)u_0^3(x)dx \neq 0$. *Тогда для любого* $u_0 \in \mathfrak{U}$, φ, $\psi \in \mathbb{R}$ *и некоторого* $T = T(u_0)$ *существует единственное решение* $u \in C^\infty((-T;T),\mathfrak{U})$, α, $\beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, *задачи (6) – (8).*

В случае нетривиального ядра оператора L при производной по времени для нахождения условий существования и единственности решения вводится множество $\mathfrak{D}$ – множество допустимых значений φ, ψ, при которых решениями задачи будут коэффициенты α, β одного знака. Искомое множество $\mathfrak{D}$ имеет вид

$$\mathfrak{D} = \left\{\varphi, \psi \in \mathbb{R} : \int\limits_{\Omega}(\psi - \varphi x)u_0(x)dx \times \int\limits_{\Omega}(\psi - \varphi x)u_0^3(x)dx > 0\right\}.$$

Теорема 6 *При* $n = 2$, $s \le 4$, *любых* φ, $\psi \in \mathfrak{D}$ *и* $u_0 \in \mathfrak{U}$ *таких, что*

$$\varphi \int\limits_{\Omega} x u_0^3(x)dx \neq \psi \int\limits_{\Omega} u_0^3(x)dx, \quad \psi \int\limits_{\Omega} u_0(x)dx \neq \varphi \int\limits_{\Omega} x u_0(x)dx,$$
$$\int\limits_{\Omega} u_0(x)dx \int\limits_{\Omega} x u_0^3(x)dx \neq \int\limits_{\Omega} x u_0(x)dx \int\limits_{\Omega} u_0^3(x)dx \ \text{и}$$
$$\left\langle \left(u_0(x) \int\limits_{\Omega}(\varphi\xi - \psi)u_0^3(\xi)d\xi + u_0^3(x) \int\limits_{\Omega}(\psi - \varphi\xi)u_0(\xi)d\xi \right), \chi_k \right\rangle = 0$$

существует единственное решение $u \in \mathfrak{U}$, α, $\beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\alpha\beta \in \mathbb{R}_+$ *обратной задачи (6) – (8).*

Рассмотрим случай $n = 3$ при $s \le 3$ и для произвольного n при $s \le 2$. Коэффициенты α_i определены формулами $\alpha_i = \delta_i \cdot \delta^{-1}$, где

$$\delta_i = \begin{vmatrix} \int\limits_{\Omega} u_0(x)dx & \int\limits_{\Omega} x u_0(x)dx & \dots & \mu_1 & \dots & \int\limits_{\Omega} x^{2s-2}u_0(x)dx \\ \int\limits_{\Omega} u_0^3(x)dx & \int\limits_{\Omega} x u_0^3(x)dx & \dots & \mu_2 & \dots & \int\limits_{\Omega} x^{2s-2}u_0^3(x)dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int\limits_{\Omega} u_0^{2s-1}(x)dx & \int\limits_{\Omega} x u_0^{2s-1}(x)dx & \dots & \mu_s & \dots & \int\limits_{\Omega} x^{2s-2}u_0^{2s-1}(x)dx \end{vmatrix},$$

$$\delta = \begin{vmatrix} \int\limits_\Omega u_0(x)dx & \int\limits_\Omega xu_0(x)dx & \dots & \int\limits_\Omega x^{2s-2}u_0(x)dx \\ \int\limits_\Omega u_0^3(x)dx & \int\limits_\Omega xu_0^3(x)dx & \dots & \int\limits_\Omega x^{2s-2}u_0^3(x)dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int\limits_\Omega u_0^{2s-1}(x)dx & \int\limits_\Omega xu_0^{2s-1}(x)dx & \dots & \int\limits_\Omega x^{2s-2}u_0^{2s-1}(x)dx \end{vmatrix} \neq 0,$$

причем $\alpha_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, когда $\delta_i \neq 0$.

Лемма 7 *Пусть* ker $L = \{0\}$, *$s \leq 2$ при $n \in \mathbb{N}$ или $s \leq 3$ при $n = 3$ и $\delta_i \neq 0$ при $i = 1, ..., n$. Тогда для любого $u_0 \in \mathfrak{U}$, $\mu_i \in \mathbb{R}$ и некоторого $T = T(u_0)$ существует единственное решение $u \in C^1((-T,T);\mathfrak{U})$, $\alpha_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ задачи (6) – (8).*

В случае ker $L \neq \{0\}$ введем множество $\mathfrak{D}$ – множество допустимых значений μ_i, при которых решениями задачи будут коэффициенты α_i одного знака. Искомое множество $\mathfrak{D}$ имеет вид

$$\mathfrak{D} = \{\mu_i, \mu_j \in \mathbb{R} : \delta_i \cdot \delta_j > 0 \ \forall i, j = 1, ..., n\}.$$

Теорема 7 *Пусть* ker $L \neq \{0\}$, *$s \leq 2$ при $n \in \mathbb{N}$ или $s \leq 3$ при $n = 3$ и $\delta_i \neq 0$ при $i = 1, ..., n$. Тогда при любых $\mu_i \in \mathfrak{D}$, $u_0 \in \mathfrak{U}$ и*

$$\langle(\delta_1 u_0 + \delta_2 u_0^3 + ... + \delta_n u_0^{2n-1}), \chi_k\rangle = 0, \quad k = 1, ..., l$$

существует единственное решение $u \in C^1((-T,T);\mathfrak{U})$, $\alpha_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\alpha_i \cdot \alpha_j$ – одного знака, обратной задачи (6) – (8).

П. 3.3 посвящен описанию разработанных автором алгоритмов нахождения решения прямых и обратных задач для моделей Хоффа, заданных в области. При разработке алгоритмов возникла необходимость в рассмотрении прямых и обратных задач (6) – (8) с условием Шоуолтера – Сидорова $(\lambda + \Delta)(u(x,0) - u_0(x)) = 0$.

Теорема 8 *При любых $\alpha_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $i = 1, ..., n$ и*

(i) ker $L = \{0\}$ *существует единственное решение задачи* (6)–(7) *при любых $u_0 \in \mathfrak{U}$.*

(ii) ker $L \neq \{0\}$ *и все α_i одного знака существует единственное решение задачи* (6)–(8) *при любых $u_0 \in \mathfrak{U}$.*

Теорема 9 *(i) Пусть* $\ker\ L = \{0\}$, *$s \leq 2$ при $n \in \mathbb{N}$ или $s \leq 3$ при $n = 3$ или $s \leq 4$ при $n = 2$ и $\delta_i \neq 0$ при $i = 1, ..., .$ Тогда для любого $u_0 \in \mathfrak{U}$, $\mu_i \in \mathbb{R}$ и некоторого $T = T(u_0)$ существует единственное решение $u \in C^1((-T,T);\mathfrak{U})$, $\alpha_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ задачи (6) – (8).*

(ii) Пусть $\ker\ L \neq \{0\}$, *$s \leq 2$ при $n \in \mathbb{N}$ или $s \leq 3$ при $n = 3$ или $s \leq 4$ при $n = 2$ и $\delta_i \neq 0$ при $i = 1, ..., n$. Тогда при любых $\mu_i \in \mathfrak{D}$ и $u_0 \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение $u \in C^1((-T,T);\mathfrak{U})$, $\alpha_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\alpha_i \cdot \alpha_j$ – одного знака, обратной задачи (6) – (8).*

П.3.4 содержит описание комплекса программ, разработанного в вычислительной среде Maple 13.0. Для комплекса программ приведены его функциональное назначение, область применения, описана логическая структура, используемые технические средства и выходные данные. Комплекс программ, опираясь на метод Галеркина, позволяет находить приближенное численное решение задач (6)–(7) и (6)–(8) и строит графическое изображение этого решения при различных значениях λ, показывая простоту фазового пространства.

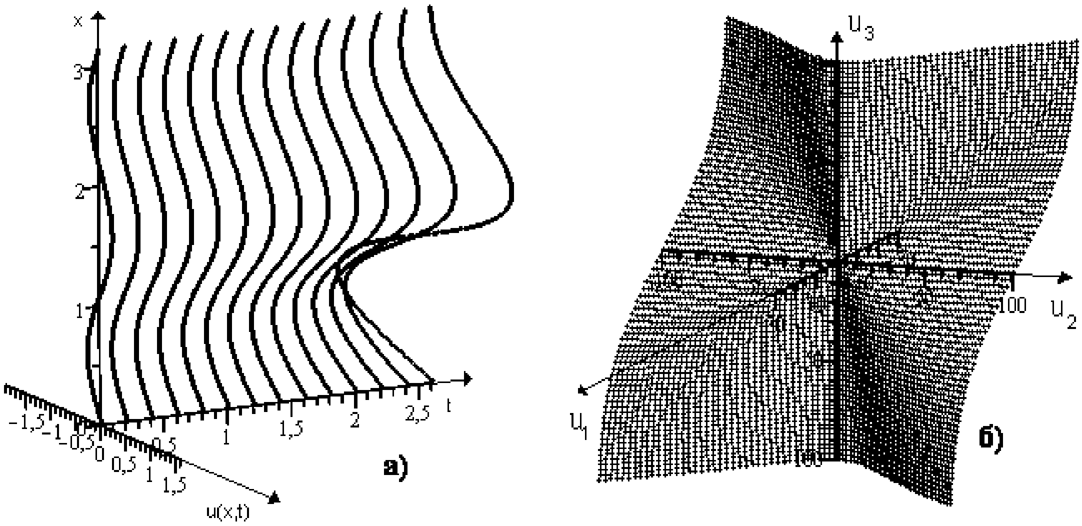

Рис. 2 Решение u=u(x,t) (а) и фазовое пространство (б) уравнения (6) при $\lambda = 1$, если $u(t,x) = u_1(t)\sqrt{2/\pi}\sin x + u_2(t)\sqrt{2/\pi}\sin 2x + u_3(t)\sqrt{2/\pi}\sin 3x$

Результаты, выносимые на защиту:

1. Найдены условия разрешимости прямых и обратных задач для уравнений Хоффа.

2. Исследована морфология их фазового пространства.

3. Разработан алгоритм численного решения прямых и обратных задач для уравнений Хоффа.

4. Спроектирован и реализован программный комплекс нахождения численных решений прямых и обратных задач для уравнений Хоффа.

5. Проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие эффективность предложенных алгоритмов, методов и подходов.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК:

1. *Свиридюк, Г. А.* О прямой и обратной задачах для уравнений Хоффа на графе / Г. А. Свиридюк, А. А. Баязитова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. – 2009. –№1(18). – С. 6–17.

2. *Баязитова, А. А.* Задача Штурма – Лиувилля на геометрическом графе / А. А. Баязитова // Вестн. ЮУрГУ. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – 2010. – № 16 (192). – С. 4–9.

3. *Баязитова, А. А.* Численное исследование процессов в моделях Хоффа / А. А. Баязитова // Вестн. ЮУрГУ. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – 2011. – № 4(221). – С. 4–9.

4. *Баязитова, А. А.* Задача Шоуолтера – Сидорова для модели Хоффа на геометрическом графе. / А. А. Баязитова // Изв. Иркутского гос. ун-та, серия Математика. – 2011. – Т. 4, №1. – С. 2–8.

Другие научные публикации:

5. Программа нахождения численного решения в прямых и обратных задачах в моделях Хоффа: свидетельство 2011611830 / Баязитова А.А. (RU); правообладатель ГОУ ВПО "Южно-Уральский государственный университет". – 2011610110; заявл. 11.01.2011; зарегистр. 28.02.2011, Реестр программ для ЭВМ.

6. *Баязитова, А. А.* Об обратной задаче для уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной на графе / А. А. Баязитова // Дифференциальные уравнения и их приложения: тез. докл. науч. конф. – Самара, 2007. – С. 31–32.

7. *Свиридюк, Г. А.* Обратная задача для уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной на графе / Г. А. Свиридюк, А. А. Баязитова // Неклассические уравнения математической физики: сб. тр. междунар. конф. "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", посвящ. 100-летию со дня рождения акад. И.Н. Векуа. Новосибирск, 2007. С. 244–250.

8. *Баязитова, А. А.* Об обратной задаче для уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной на графе / А. А. Баязитова // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: тр. междунар. конф., Стерлитамак, 24–28 июня 2008 г. – Уфа, 2008. – Т. 3. – С. 10–14.

9. *Баязитова, А. А.* Обратная задача для уравнения Хоффа / А. А. Баязитова // Вестн. ЮУрГУ. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – 2008. – № 15(115). – С. 4–8.

10. *Баязитова, А. А.* Об обратной задаче для уравнений Хоффа на графе / А. А. Баязитова // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений: тез. докл. междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева, Новосибирск, 5–12 октября 2008 г. – Новосибирск, 2008. – С. 103.

11. *Баязитова, А. А.* Обратная задача для одного неклассического уравнения / А. А. Баязитова // Обозрение прикладной и промышленной математики. – М., 2009. – Т. 16, Вып. 2. – С. 285–286.

12. *Баязитова, А. А.* Обратная задача для одного неклассического уравнения / А. А. Баязитова // Научный поиск: материалы первой науч. конф. аспирантов и докторантов. Соц.-гуманитар. и естеств. науки. – Челябинск, 2009. – С. 12–15.

13. *Баязитова, А. А.* Обобщенная задача Штурма – Лиувилля на графе / А. А. Баязитова //Воронежская зимняя математическая школа им. С.Г. Крейна – 2010: тез. докл. – Воронеж, 2010. – С. 18–19.

14. *Баязитова, А. А.* Начально-краевая задача для обобщенного уравнения Хоффа / А. А. Баязитова // Научный поиск: материалы второй науч. конф. аспирантов и докторантов. Естест. науки. – Челябинск, 2010. – С. 11–14.

15. *Баязитова, А. А.* Фазовое пространство начально-краевой задачи для обобщенного уравнения Хоффа / А.А. Баязитова // Вестник МаГУ. Математика. Магнитогорск: МаГУ, 2010. – Вып. 12. – С. 15–21.

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 23.08.2011. Формат 60×84 1/16.

Печать цифровая. Усл. печ. л. 0,70. Уч.-изд. л. 1.

Тираж 100 экз. Заказ 256/472.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.

454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76