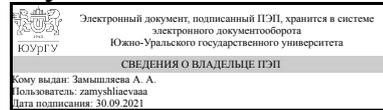


# ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ:  
Директор института  
Институт естественных и точных  
наук



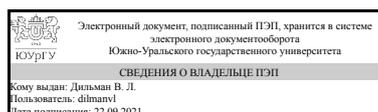
А. А. Замышляева

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

**дисциплины** Б.1.18 Теория функций комплексного переменного  
**для направления** 03.03.01 Прикладные математика и физика  
**уровень** бакалавр **тип программы** Академический бакалавриат  
**профиль подготовки** Прикладные математика и физика  
**форма обучения** очная  
**кафедра-разработчик** Математический анализ и методика преподавания математики

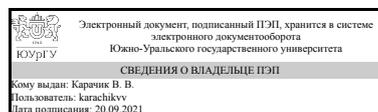
Рабочая программа составлена в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 03.03.01 Прикладные математика и физика, утверждённым приказом Минобрнауки от 06.03.2015 № 158

Зав.кафедрой разработчика,  
д.физ.-мат.н., доц.



В. Л. Дильман

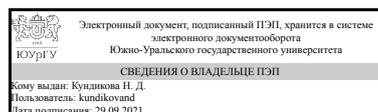
Разработчик программы,  
д.физ.-мат.н., снс, профессор



В. В. Карачик

СОГЛАСОВАНО

Зав.выпускающей кафедрой  
Оптоинформатика  
д.физ.-мат.н., проф.



Н. Д. Кундикова

## 1. Цели и задачи дисциплины

Аналитические функции естественно возникают во многих задачах математики, механики и физики. По этой причине образование любого специалиста в области математики и ее приложений не может считаться полным без основательного изучения теории таких функций и их основных приложений. Цель изучения дисциплины «Теория функций комплексного переменного» состоит в обучении студентов основам теории аналитических функций, методам комплексного анализа и приложению данной теории к задачам математического анализа, механики и физики. Задачами изучения дисциплины являются: 1. Распространение основных понятий действительного анализа (таких как производная, криволинейный интеграл, числовой и функциональный ряд) на комплексный случай. 2. Установление тех фактов действительного анализа, которые непосредственно переносятся в комплексную область и изучение свойств аналитических функций, имеющих комплексную природу. 3. Установление связи комплексного анализа с другими разделами математики, с механикой и физикой и приложение теории функций комплексного переменного.

### Краткое содержание дисциплины

Комплексные числа: комплексные числа, комплексная плоскость; модуль и аргумент комплексного числа, их свойства; числовые последовательности и их пределы, ряды; стереографическая проекция, ее свойства; сфера Римана, расширенная комплексная плоскость; множества на плоскости, области и кривые. Функции комплексного переменного и отображения множеств: функции комплексного переменного; предел функции; непрерывность, модуль непрерывности; дифференцируемость по комплексному переменному, условие Коши-Римана; аналитическая функция; геометрический смысл аргумента и модуля производной; понятие о конформном отображении. Элементарные функции: целая линейная и дробно-линейная функция, их свойства, общий вид дробно-линейного отображения круга на себя и верхней полуплоскости на круг; экспонента и логарифм, степень с произвольным показателем; понятие о римановой поверхности на примерах логарифмической и общей степенной функций; функция Жуковского; тригонометрические и гиперболические функции. Интеграл по комплексному переменному, его простейшие свойства, связь с криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода; сведение к интегралу по действительному переменному; первообразная функция, формула Ньютона-Лейбница; переход к пределу под знаком интеграла; интегральная теорема Коши. Интеграл Коши: интегральная формула Коши; бесконечная дифференцируемость аналитических функций, формулы Коши для производных; теорема Морера. Последовательности и ряды аналитических функций в области: теорема Вейерштрасса; степенные ряды; теорема Абеля, формула Коши-Адамара; разложение аналитической функции в степенной ряд, единственность разложения; неравенство Коши для коэффициентов степенного ряда; действия со степенными рядами. Теорема единственности и принцип максимума модуля: нули аналитической функции, порядок нуля; теорема единственности для аналитических функций; принцип максимума модуля и лемма Шварца. Ряд Лорана: ряд Лорана, область его сходимости; разложение аналитической функции в ряд Лорана, единственность разложения, формулы и неравенства Коши для коэффициентов; теорема Лиувилля и теорема об устранимой особой точке. Изолированные особые точки однозначного

характера; классификация изолированных особых точек однозначного характера по поведению функции и ряду Лорана; полюс, порядок полюса; существенная особая точка, теорема Сохоцкого-Вейерштрасса, понятие о теореме Пикара; бесконечно удаленная точка как особая. Вычеты, принцип аргумента: определение вычета, теоремы Коши о вычетах, вычисления вычетов; применения вычетов; логарифмический вычет, принцип аргумента; теорема Руше и теорема Гурвица. Отображения посредством аналитических функций: принцип открытости и принцип области; теорема о локальном обращении; однолистные функции, критерий локальности однолистности и критерий конформности в точке, достаточное условие однолистности (обратный принцип соответствия границ); дробно-линейность однолистных конформных отображений круговых областей друг на друга; теорема Римана (без доказательства) и понятие о соответствии границ при конформном отображении. Аналитическое продолжение: аналитическое продолжение по цепи и по кривой; полная аналитическая функция в смысле Вейерштрасса, ее риманова поверхность и особые точки; теорема о монодромии; аналитическое продолжение через границу области, принцип симметрии. Целые и мероморфные функции: целые функции, их порядок и тип; произведение Вейерштрасса; мероморфные функции; функции, мероморфные в расширенной плоскости. Принцип симметрии при конформном отображении и его применение. Симметрия относительно действительной оси. Применение принципа симметрии: внешность креста на полуплоскость, внутренность параболы на полуплоскость. Симметрия относительно окружности. Отображение круга на круг, кольца на кольцо. Формула Кристоффеля-Шварца – отображение полуплоскости на многоугольник. Пример: отображение полуплоскости на четырехугольник. Постановка задачи Дирихле. Инвариантность уравнения Лапласа относительно конформного отображения. Задача Дирихле для круга. Интеграл Пуассона, разложение гармонических функций в ряды, связь с тригонометрическими рядами.

## 2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

Планируемые результаты освоения ОП ВО (компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (ЗУНы)
ОК-7 способностью к самоорганизации и самообразованию	Знать: основные теоремы курса: Теорема о необходимом и достаточном условии дифференцируемости функции комплексного переменного в точке. Теорема о вычислении интеграла от функции комплексного переменного. Теорема Коши. Интегральная формула Коши. Теоремы о разложении регулярной функции в ряды Тейлора и Лорана. Теорема Морера. Теорема Лиувилля. Теорема единственности для регулярных функций. Теоремы о классификации изолированных особых точек по виду ряда Лорана. Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса. Формулировка теоремы Пикара. Теорема о вычислении интеграла с помощью вычетов. Лемма Жордана и теорема о вычислении несобственных интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента и теорема Руше. Теорема о

	<p>разложении мероморфной функции на элементарные дроби. Принцип сохранения области при конформном отображении. Формулировка принципа соответствия границ. Формулировка теоремы Римана. Критерий локальной однолиственности. Достаточное условие однолиственности функции в области. Принцип максимума модуля. Принцип симметрии Римана-Шварца. Интегральная формула Пуассона для круга и полуплоскости.</p>
	<p>Уметь:решать следующие стандартные задачи: Операции над комплексными числами. Построение линий и областей на комплексной плоскости. Определение и свойства основных элементарных (однозначных и многозначных) функций в комплексной области. Проверка регулярности функций. Восстановление регулярной функции по ее действительной или мнимой части. Интегрирование функций комплексной переменной. Интегрирование регулярных функций по формуле Ньютона-Лейбница. Разложение регулярных функций в ряды Тейлора и Лорана. Нахождение особых точек регулярных и аналитических функций и определение их характера. Вычисление вычетов функций. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Применение вычетов к вычислению определенных и несобственных интегралов. Применение теоремы Руше к отделению нулей. Построение конформных отображений областей.</p>
	<p>Владеть:основными понятиями курса: комплексные числа действия над комплексными числами области и линии в комплексной плоскости основные элементарные функции комплексного переменного последовательности и ряды комплексных чисел и функций производная и интеграл от комплексных функций регулярные и гармонические функции ряды Тейлора и Лорана изолированные особые точки регулярных и аналитических функций классификация особых точек вычеты в конечной и бесконечной точке сведение действительных интегралов к комплексным однолиственность функции конформные отображения дробно-линейная функция конформные отображения элементарными функциями гармонические функции</p>

### 3. Место дисциплины в структуре ОП ВО

Перечень предшествующих дисциплин, видов работ учебного плана	Перечень последующих дисциплин, видов работ
Б.1.17 Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Б.1.15 Математический анализ	В.1.05 Теория поля, ДВ.1.03.01 Теория групп, В.1.10 Дополнительные главы высшей

	математики, В.1.15 Функциональный анализ, Б.1.21 Уравнения математической физики
--	--

Требования к «входным» знаниям, умениям, навыкам студента, необходимым при освоении данной дисциплины и приобретенным в результате освоения предшествующих дисциплин:

Дисциплина	Требования
Б.1.15 Математический анализ	Знание функциональных и числовых рядов, криволинейных интегралов, дифференциального исчисления функций 2-х переменных
Б.1.17 Линейная алгебра и аналитическая геометрия	Знание основ линейной алгебры, уравнений прямой и кривых второго порядка

#### 4. Объём и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 з.е., 144 ч.

Вид учебной работы	Всего часов	Распределение по семестрам в часах	
		Номер семестра	
		3	
Общая трудоёмкость дисциплины	144	144	
<i>Аудиторные занятия:</i>	80	80	
Лекции (Л)	32	32	
Практические занятия, семинары и (или) другие виды аудиторных занятий (ПЗ)	48	48	
Лабораторные работы (ЛР)	0	0	
<i>Самостоятельная работа (СРС)</i>	64	64	
Задания для самостоятельной работы	24	24	
Домашние задания	24	24	
Подготовка к экзамену	16	16	
Вид итогового контроля (зачет, диф.зачет, экзамен)	-	экзамен	

#### 5. Содержание дисциплины

№ раздела	Наименование разделов дисциплины	Объем аудиторных занятий по видам в часах			
		Всего	Л	ПЗ	ЛР
1	Регулярные функции	39	15	24	0
2	Мнозначные аналитической функции	13	5	8	0
3	Теория вычетов и ее применение	12	4	8	0
4	Конформные отображения	16	8	8	0

##### 5.1. Лекции

№ лекции	№ раздела	Наименование или краткое содержание лекционного занятия	Кол-во часов

1	1	Действия над комплексными числами. Области и линии на комплексной плоскости. Стереографическая проекция. Последовательности и ряды.	2
2	1	Функции комплексной переменной. Предел и непрерывность. Основные однозначные функции комплексного переменного. Интегрирование функций комплексной переменной.	2
3	1	Дифференцирование функций. Условия Коши-Римана. Условия Коши-Римана в полярной системе координат.	2
4	1	Интегральная теорема Коши. Формула Ньютона-Лейбница. Регулярные функции. Степенные ряды. Ряды Тейлора.	2
5	1	Гармонические функции и их свойства. Сопряженные гармонические функции. Теоремы о среднем.	2
6	1	Достаточные условия регулярности. Теорема Мореры. Теорема единственности регулярной функций и ее применение. Продолжение некоторых тождеств из действительного случая в комплексный.	2
7	1	Особые точки однозначного характера: устранимая особая, полюс, существенно особая точка. Разложение регулярной функции в ряд Лорана. Основные приемы разложений.	2
8	1	Исследование особых точек с помощью рядов Лорана. Ряд Лорана в окрестности бесконечности. Теоремы Сохотского, Пикара и Лиувилля.	1
9	2	Многозначные аналитические функции. Продолжение вдоль кривой. Логарифмическая функция и ее свойства.	2
10	2	Степенная функция. Арифметические операции над аналитическими функциями. Аналитические и регулярные ветви полных аналитических функций.	2
11	2	Особые точки аналитических функций. Точки ветвления. Граничные особые точки регулярных функций.	1
12	3	Вычет регулярной в кольце функции. Вычет в бесконечно удаленной точке. Полная сумма вычетов. Применение вычетов к вычислению контурных интегралов.	2
13	3	Принцип аргумента и теорема Руше. Мероморфные функции.	2
14	4	Геометрический смысл производной. Теоремы об обратных функциях. Однолистные функции.	2
15	4	Общие свойства конформных отображений. Дробно-линейные отображения. Конформность, групповое и круговое свойства, симметрия.	3
16	4	Конформные отображения элементарными функциями $z^2$ , $\sqrt{z}$ , $z^a$ , $e^z$ , $\ln z$ , функция Жуковского $w=(z+1/z)/2$ . Принцип симметрии. Отображения многоугольников, теорема Кристоффеля-Шварца. Задача Дирихле.	3

## 5.2. Практические занятия, семинары

№ занятия	№ раздела	Наименование или краткое содержание практического занятия, семинара	Кол-во часов
1	1	Действия над комплексными числами. Области и линии на комплексной плоскости. Стереографическая проекция и сферическая метрика. Последовательности и ряды.	2
2	1	Кривые и области. Функции комплексной переменной. Непрерывность. Основные однозначные функции комплексного переменного: тригонометрические и гиперболические функции.	3
3	1	Интегрирование и свойства интегралов. Дифференцирование функций. Условия Коши-Римана.	3
4	1	Интегральная теорема Коши, первообразная, формула Ньютона-Лейбница. Регулярные функции. Степенные ряды. Ряды Тейлора.	3

5	1	Интегральная формула Коши. Свойства регулярных функций. Гармонические функции и их свойства.	3
6	1	Достаточные условия регулярности. Теорема единственности. Продолжение некоторых тождеств из действительного случая в комплексный.	2
7	1	Особые точки однозначного характера: устранимая особая, полюс, существенно особая. Разложение регулярной функции в ряд Лорана.	4
8	1	Разложение регулярных функций в ряды Тейлора и Лорана.	4
9	2	Аналитические функции. Логарифмическая и степенная функции.	3
10	2	Приращение аргумента вдоль кривой. Выделение регулярных ветвей. Производная регулярной ветви. Ряды Лорана регулярных ветвей.	3
11	2	Особые точки аналитических функций.	2
12	3	Вычет регулярной в кольце функции. Вычет в бесконечно удаленной точке. Применение вычетов к вычислению контурных интегралов.	4
13	3	Принцип аргумента и теорема Руше. Разложение мероморфной функции на элементарные дроби.	4
14	4	Аргумент и модуль производной. Отображения: линейные растяжения, углы между кривыми, коэффициент растяжения. Свойства конформных отображений.	3
15	4	Принцип соответствия границ. Дробно-линейная функция и ее свойства. Конформные отображения с помощью дробно-линейных функций, элементарных функций, функции Жуковского	2
16	4	Принцип симметрии: внешность креста на полуплоскость, внутренность параболы на полуплоскость. Формула Кристоффеля-Шварца (полуплоскость на треугольник). Задача Дирихле.	3

### 5.3. Лабораторные работы

Не предусмотрены

### 5.4. Самостоятельная работа студента

Выполнение СРС		
Вид работы и содержание задания	Список литературы (с указанием разделов, глав, страниц)	Кол-во часов
Задания для самостоятельной работы	Сб. зад. по ТФКП, осн. лит.[2], с. 5-361 и мет. пос.[1], с. 3-43.	24
Подготовка к экзамену	ТФКП, осн. лит. [1], с. 7-394; Доп. лит. [4], с. 7-471	16
Домашние задания	Сб. зад. по ТФКП, осн. лит.[2], Главы 1-6, с. 5-361; мет. пос.[1], с. 3-43; Доп. лит. [1], с.51-95.	24

## 6. Инновационные образовательные технологии, используемые в учебном процессе

Инновационные формы учебных занятий	Вид работы (Л, ПЗ, ЛР)	Краткое описание	Кол-во ауд. часов
Коллоквиум	Практические занятия и семинары	Обсуждение теоретических утверждений и практических задач	2

## Собственные инновационные способы и методы, используемые в образовательном процессе

Не предусмотрены

Использование результатов научных исследований, проводимых университетом, в рамках данной дисциплины: нет

## 7. Фонд оценочных средств (ФОС) для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

### 7.1. Паспорт фонда оценочных средств

Наименование разделов дисциплины	Контролируемая компетенция ЗУНы	Вид контроля (включая текущий)	№№ заданий
Все разделы	ОК-7 способностью к самоорганизации и самообразованию	Проверка заданий для самостоятельной работы.	13 задач из сборника заданий для самостоятельной работы [2]; Каждая задача 1,54б.
Все разделы	ОК-7 способностью к самоорганизации и самообразованию	Экзамен	4 задания из экзаменационных вопросов: 2 теоретических вопроса и 2 практические задачи; каждый вопрос оценивается из 10б.
Все разделы	ОК-7 способностью к самоорганизации и самообразованию	Проверка контрольных работ	1-я контрольная 8 заданий; 2-я контрольная 5; каждый вопрос оценивается из 2б.
Все разделы	ОК-7 способностью к самоорганизации и самообразованию	Проверка домашних заданий и активности.	От 2 до 3 заданий из задачника [2];

### 7.2. Виды контроля, процедуры проведения, критерии оценивания

Вид контроля	Процедуры проведения и оценивания	Критерии оценивания
Проверка заданий для самостоятельной работы.	При оценивании результатов мероприятия используется балльно-рейтинговая система оценивания результатов учебной деятельности обучающихся (утверждена приказом ректора от 24.05.2019 г. № 179) Задания сдаются в отдельных тетрадях для проверки. Выполненные задания проверяются преподавателем и возвращаются студенту с замечаниями. Студент должен переделать задания с замечаниями, устранить сделанные замечания и опять сдать тетрадь для проверки. За правильно выполненное задание 1,54б. Максимальный балл за мероприятие 20б. Вес мероприятия 1.	Зачтено: Рейтинг за мероприятие не меньше 60%. Не зачтено: Рейтинг за мероприятие меньше 60%.
Проверка контрольных работ	При оценивании результатов мероприятия используется балльно-рейтинговая система оценивания результатов учебной деятельности обучающихся (утверждена приказом ректора от 24.05.2019 г. № 179) Проверяются задания контрольной работы, выполненной на отдельном листе. После истечения времени на выполнения работы, выполненные задания проверяются, затем студент знакомится с	Зачтено: Рейтинг за мероприятие не меньше 60%. Не зачтено: Рейтинг за мероприятие меньше 60%.

	результатом проверки. За правильно выполненное задание дается 2б. Максимальный балл за 1-ю контрольную работу 16б, за 2-ю контрольную работу 10б. Вес мероприятия 1.	
Экзамен	При оценивании результатов мероприятий используется балльно-рейтинговая система оценивания результатов учебной деятельности обучающихся (утверждена приказом ректора от 24.05.2019 г. № 179). В начале экзамена студент получает экзаменационный билет. Затем ему выделяется время на ответы и он начинает письменно отвечать на вопросы. После истечения времени экзамена письменные ответы на вопросы билета сдаются для проверки. Билет содержит 4 вопроса: 2 теоретических и 2 практических. Каждый вопрос оценивается из 10б. Максимальный балл мероприятия 40б. Максимальный балл за предмет 100б. Баллы за предмет складываются из суммарного текущего балла и балла за экзамен. Сдавать экзамен обязательно.	Отлично: Величина рейтинга обучающегося по дисциплине 85%-100% Хорошо: Величина рейтинга обучающегося по дисциплине 75%-84% Удовлетворительно: Величина рейтинга обучающегося по дисциплине 60%-74% Неудовлетворительно: Величина рейтинга обучающегося по дисциплине 0%-59%
Проверка домашних заданий и активности.	Домашние задания. В начале практического занятия проверяются задания, выданные на предыдущем практическом занятии. Один из студентов представляет свое решение у доски, остальные проверяют это решение. Максимальный балл домашних заданий 7б. Активность. В течении практического занятия студенты выходят к доске для решения задач. Максимальный балл активности 7б. Вес мероприятий 1.	Зачтено: Активность и домашние задания зачтены, если рейтинг за мероприятие не меньше 60%. Не зачтено: Активность и домашние задания не зачтены, если рейтинг за мероприятие меньше 60%.

### 7.3. Типовые контрольные задания

Вид контроля	Типовые контрольные задания
Проверка заданий для самостоятельной работы.	Действия с комплексными числами Последовательности и ряды Дифференцируемость функции комплексной переменной Интегральная формула Коши Ряд Лорана Изолированные особые точки Вычеты Семестровая работа.pdf
Проверка контрольных работ	кр2.pdf; кр1.pdf
Экзамен	Билеты_ТФКП_2020.pdf
Проверка домашних заданий и активности.	Задачи выдаются из задачника [2]

## 8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### Печатная учебно-методическая документация

а) основная литература:

1. Карачик, В. В. Теория функций комплексного переменного [Текст] учеб. пособие по направлению 03.03.01 "Приклад. математика и физика" и др. В. В. Карачик, Л. Д. Менихес ; Юж.-Урал. гос. ун-т, Каф. Мат. и функцион. анализ ; ЮУрГУ. - Челябинск: Издательский Центр ЮУрГУ, 2015. - 410, [1] с. ил. электрон. версия

2. Волковыский, Л. И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного Для вузов Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Наука, 1970. - 319 с. черт.

3. Зверович, Э. И. Вещественный и комплексный анализ [Текст] Кн. 4 Ч. 6 Теория аналитических функций комплексного переменного учеб. пособие для мат. специальностей вузов : в 6 ч. Э. И. Зверович. - Минск: Вышэйшая школа, 2008. - 319 с.

*б) дополнительная литература:*

1. Могильницкий, В. А. Высшая математика. Типовые расчеты Ч. 3 Обыкновенные дифференциальные уравнения, ряды, теория функций комплексного переменного, операционное исчисление Учеб. пособие ЮУрГУ, Каф. Алгебра и геометрия; В. А. Могильницкий, Р. П. Петрова, Н. В. Ширококов; Под ред. А. А. Патрушева. - Челябинск: Издательство ЮУрГУ, 1998. - 98 с.

2. Пантелеев, А. В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах Учеб. пособие для втузов. - М.: Высшая школа, 2001. - 445 с. ил.

3. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного учеб. для вузов И. И. Привалов. - 15-е изд., стер. - СПб. и др.: Лань, 2009. - 432 с. ил.

4. Сидоров, Ю. В. Лекции по теории функций комплексного переменного Учеб. для инж.-физ. и физ.-техн. спец. вузов. - 3-е изд., испр. - М.: Наука, 1989. - 477 с. ил.

*в) отечественные и зарубежные журналы по дисциплине, имеющиеся в библиотеке:*

1. Математические заметки

*г) методические указания для студентов по освоению дисциплины:*

1. Кудрявцев К.Н., Самаров А.Б. Функции комплексного переменного. -Челябинск: Из-во ЮУрГУ, 2008. -45с.

2. Сборник заданий для самостоятельной работы

*из них: учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студента:*

3. Кудрявцев К.Н., Самаров А.Б. Функции комплексного переменного. -Челябинск: Из-во ЮУрГУ, 2008. -45с.

4. Сборник заданий для самостоятельной работы

**Электронная учебно-методическая документация**

Нет

## 9. Информационные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса

Перечень используемого программного обеспечения:

Нет

Перечень используемых информационных справочных систем:

Нет

## 10. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Вид занятий	№ ауд.	Основное оборудование, стенды, макеты, компьютерная техника, предустановленное программное обеспечение, используемое для различных видов занятий
Лекции	607 (16)	Доска, мел и тряпка